

Essential Skills Mathematics

Studiewijzer

Module A

Rekenen met getallen & letters

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

1. weten wat een term en wat een factor is
2. haakjes kunnen wegwerken en kunnen ontbinden in factoren met getallen
3. een getal kunnen ontbinden in priemfactoren
4. kunnen rekenen met breuken, machten en wortels
5. kunnen rekenen met letters

Onderwerpen

A.1. *Termen, Factoren en haakjes*

A.2. *Priemfactoren*

A.3. *Breuken*

A.4. *Machten*

A.5. *Wortels*

Antwoorden van de opgaven

A.1. Termen, factoren en haakjes

Een *som* of *verschil* bestaat uit *termen*, een *product* bestaat uit *factoren*.

Bekijk het volgende berekening: $2 + 3 = 5$. Deze berekening bevat twee termen, namelijk 2 en 3. De berekening $3 \cdot 5 = 15$ bevat de twee factoren 3 en 5.

Laten we nu eens kijken naar de som $3 \cdot a + 5 \cdot b \cdot c$.

Hierbij zijn $3 \cdot a$ en $5 \cdot b \cdot c$ de termen; ze worden immers gescheiden door een plus. De term $3 \cdot a$ bestaat uit twee factoren, namelijk 3 en a .

De term $5 \cdot b \cdot c$ bestaat uit drie factoren, namelijk 5, b en c .

Machtsverheffen is herhaald vermenigvuldigen met hetzelfde getal:

$$(-2)^4 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 16 \text{ (positief!)}$$

$(-3)^3 = -3 \cdot -3 \cdot -3 = -27$ (negatief). De getallen die één hoog staan (4 en 3) noem je *exponenten*.

Opgave A.1.1.

Bereken en geef aan uit hoeveel termen/factoren de volgende sommen/producten bestaan:

	Aantal termen	Aantal factoren
$-4 + 7 =$		
$-7 \cdot a + 9 \cdot a =$		
$-3 \cdot p \cdot q - 9 \cdot p \cdot q =$		
$(-1)^{100} =$		

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.1.1. Termen en factoren](#)

Als je *haakjes* wilt wegwerken kun je de volgende regel toepassen:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Kijk naar het volgende voorbeeld: $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$. Links staat een product van 2 factoren, rechts een som van 2 termen (die elk weer een product zijn).

Het *ontbinden in factoren* is de omgekeerde bewerking:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Voorbeeld: $19 \cdot 3 + 19 \cdot 7 = 19 \cdot (3 + 7)$. De tweeterm links is ontbonden in de twee factoren 19 en $(3 + 7)$.

Opgave A.1.2.

Werk de haakjes weg (niet uitrekenen):

a) $17 \cdot (18 + 19) =$

b) $(33 - 19) \cdot 31 =$

c) $a \cdot (-3 + 19) =$

d) $-b \cdot (-a - c) =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.1.2. Haakjes wegwerken](#)

Opgave A.1.3.

Ontbind (niet uitrekenen):

a) $21 \cdot 117 + 99 \cdot 117 =$

b) $67 \cdot 45 + 67 \cdot 41 + 67 \cdot 5 =$

c) $-7 \cdot a - 9 \cdot a =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.1.3. Ontbinden in factoren met getallen](#)

A.2. Priemfactoren

De *delers* van een (geheel) getal zijn alle (gehele) getallen waardoor dat getal deelbaar is.

Elk geheel getal groter dan 1 heeft *minstens* 2 delers: de deler 1 en het getal zelf.

Een *priemgetal* heeft precies twee delers. Het eerste priemgetal is 2, daarna volgen 3, 5, 7, 11, 13, 17,...

Elk geheel getal groter dan 1 is opgebouwd uit priemfactoren.

Het getal 100 is als volgt te ontbinden in zijn priemfactoren (priemdelers):

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2 .$$

$$360 \text{ is te ontbinden als: } 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 .$$

Opgave A.2.1.

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

a) $48 =$

b) $98 =$

c) $99 =$

d) $900 =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.2.1. Ontbinden in priemfactoren](#)

A.3. Breuken

Een *breuk* of *quotiënt* is te schrijven als: $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$.

Een zelfde factor 'wegdelen' uit de teller en de noemer heet *vereenvoudigen*:

$$\frac{p \cdot t}{p \cdot n} = \frac{t}{n}$$

Bijvoorbeeld: $\frac{50000}{250} = \frac{5000 \cdot 10}{25 \cdot 10} = \frac{5000}{5} = \frac{5 \cdot 1000}{5 \cdot 5} = \frac{1000}{5} = 200.$

Let op het handig wegschrappen van de 4 en de 5 in: $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Soms is het handig om teller en noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen om de breuk 'eenvoudiger' te maken. In het algemeen:

$$\frac{t}{n} = \frac{t}{n} \cdot \frac{p}{p} = \frac{t \cdot p}{n \cdot p}$$

Voorbeeld: $\frac{0.8}{0.02} = \frac{0.8 \cdot 100}{0.02 \cdot 100} = \frac{80}{2} = 40.$

Opgave A.3.1.

Vereenvoudig:

a) $\frac{4}{6} =$

b) $\frac{18}{84} =$

c) $\frac{11}{33} =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.3.1. Breuken vereenvoudigen](#)

Breuken met dezelfde noemer heten *gelijknamig*. Gelijknamige breuken optellen/afrekken gaat in het algemeen als volgt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{(a + c)}{b} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{(a - c)}{b}$$

Gelijknamige breuken kun je zonder nadenken optellen/afrekken. Bekijk de volgende twee voorbeelden: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ en $\frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$.

Ongelijknamige breuken moet je eerst gelijknamig maken. In het algemeen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{(a \cdot d + b \cdot c)}{b \cdot d}$$

en

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{(a \cdot d - b \cdot c)}{b \cdot d}$$

Bekijk de volgende twee voorbeelden: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

en $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{15}$.

Opgave A.3.2.

Bereken:

a) $\frac{17}{10} - \frac{1}{2} =$

b) $\frac{2}{7} + \frac{3}{8} =$

c) $\frac{2}{a} + \frac{6}{a} =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.3.2. Breuken optellen en aftrekken](#)

Breuken vermenigvuldigen gaat als volgt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Merk op dat bij het vermenigvuldigen van breuken het onbelangrijk is of de breuken gelijknamig zijn.

Voorbeeld: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$.

Opgave A.3.3.

Bereken:

a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4} =$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{11} + \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{5} =$

c) $\frac{2}{c} \cdot \frac{5}{d} =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.3.3. Breuken vermenigvuldigen](#)

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk:

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \cdot \frac{c}{b}$$

Voorbeelden: $\frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)} = 7$ en $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$.

Opgave A.3.4.

Bereken:

$$\text{a) } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} =$$

$$\text{b) } \frac{\frac{1}{a}}{\frac{2}{b}} =$$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.3.4. Breuken delen](#)

Als laatste nog even dit: '*Delen door nul is flauwekul*'. Neem de noemer maar *vlak bij nul*, bijvoorbeeld 0.001 en kijk: $\frac{1}{0.001} = \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000$.

Evenzo $\frac{1}{0.000001} = 1000000$, dit rijst de pan uit!

Nul delen door 'iets' levert nul op: $\frac{0}{12345} = 0$. In het algemeen: $\frac{0}{a} = 0$, waarbij $a \neq 0$.

A.4. Machten

In hoofdstuk A.1. hebben we gezien dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen is. Laten we nu eens kijken naar een aantal rekenregels en voorbeelden.

De eerste regel die we bekijken is de volgende: $a^0 = 1$. Dus $5^0 = 1$ maar ook $1222123^0 = 1$.

De volgende regel wordt vaak toegepast en is belangrijk:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Een paar voorbeelden waarbij deze regel wordt gebruikt: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ en $t^{-5} = \frac{1}{t^5}$.

Als we *machten met elkaar vermenigvuldigen* kun je de volgende algemene rekenregel toepassen:

$$a^p \cdot a^q = a^{(p+q)}$$

Hierbij noem je a het grondtal en p en q de exponenten.

Voorbeelden: $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$ en $3^9 \cdot 3^{120} = 3^{(9+120)} = 3^{129}$.

Opgave A.4.1.

Schrijf korter:

a) $10^4 \cdot 10^3 =$

b) $2^9 \cdot 2 =$

c) $3^4 \cdot 3^{-5} =$

d) $k^5 \cdot k^7 =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.4.1 Machten vermenigvuldigen](#)

Bij *machten delen* kun je de volgende algemene rekenregel toepassen:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{(p-q)}$$

Voorbeelden: $\frac{3^7}{3^4} = \frac{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} = 3^3$ en $\frac{5^{123}}{5^{44}} = 5^{(123-44)} = 5^{79}$.

Opgave A.4.2.

Schrijf korter:

a) $\frac{10^5}{10^2} =$

b) $\frac{2^{12}}{2^{11}} =$

c) $\frac{3^5}{3^{-6}} =$

c) $\frac{p^6}{p^2} =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.4.2. Machten delen](#)

Bij een *macht van een macht* kun je de volgende regel toepassen:

$$(a^p)^q = a^{(p \cdot q)}$$

Voorbeelden: $(2^7)^5 = 2^{(7 \cdot 5)} = 2^{35}$ en $(3^2)^{-3} = 3^{(2 \cdot -3)} = 3^{-6}$.

Opgave A.4.3.

Schrijf korter:

a) $(3^3)^2 =$

b) $(2^{-2})^3 =$

c) $(p^4)^2 =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.4.3. Macht van een macht](#)

A.5. Wortels

Laten we weer beginnen met wat schrijfwijzen en rekenregels. Als je bijvoorbeeld de wortel uit 2 kwadrateert krijg je 2 terug: $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Maar ook geldt: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ en $\sqrt{2^2} = 2$. Hieruit kunnen we een aantal rekenregels herleiden.

De eerste rekenregel:

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

en de tweede rekenregel:

$$\sqrt{a^2} = a, \text{ waarbij } a > 0$$

Een derde belangrijke regel is de volgende:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Bekijk de volgende voorbeelden: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ en $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35}$.

Opgave A.5.1.

Bereken:

a) $\sqrt{9} =$

b) $\sqrt{4^2} =$

c) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.5.1. Rekenen met wortels](#)

Door toepassing van de bovengenoemde rekenregels zijn sommige wortels in een *vereenvoudigde vorm* te herschrijven. Hierbij is het handig om een priemontbinding (hoofdstuk A.2.) te maken van het getal onder de wortel. Bekijk het volgende voorbeeld: $\sqrt{20} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$. Je moet dus op zoek gaan naar kwadraten onder het wortelteken.

Bij het volgende voorbeeld worden twee wortels met elkaar vermenigvuldigd en vereenvoudigd:

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{2 \cdot 5} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}, \text{ nu even de factoren verplaatsen:}$$
$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}. \text{ Dan: } 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt{6}.$$

Je kunt ook eerst de vermenigvuldiging uitvoeren en daarna een priemontbinding maken: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{150} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt{6}.$

Opgave A.5.2.

Vereenvoudig:

a) $\sqrt{28} =$

b) $\sqrt{45} =$

Bereken en vereenvoudig:

c) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{10} =$

d) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{35} =$

Maak op Maple T.A. de oefening: A.5.2. Wortels vereenvoudigen

Wortels kun je schrijven als een *oneigenlijke macht*. Bekijk de volgende rekenregel:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Even een voorbeeld: $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}.$

Merk op dat de '2' meestal wordt weggelaten als we het over een *vierkantswortel* hebben,

dus: $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}.$

Nog een paar voorbeelden: $\sqrt[37]{340^{22}} = 340^{\frac{22}{37}} \quad \text{en} \quad \sqrt[4]{p^3} = p^{\frac{3}{4}}.$

Opgave A.5.3.

Schrijf als oneigenlijke macht:

a) $\sqrt{5} =$

b) $\sqrt[7]{35^3} =$

c) $\sqrt[8]{7^8} =$

[Maak op Maple T.A. de oefening: A.5.3. Wortels schrijven als oneigenlijke macht](#)

Nu we wortels als oneigenlijke machten kunnen schrijven, kunnen we alle rekenregels toepassen die we in de voorgaande hoofdstukken hebben geleerd.

Bekijk de volgende berekeningen. Ze lijken moeilijk maar als je de rekenregels goed kent valt het reuze mee:

a)
$$\sqrt[5]{4^4} \cdot \sqrt[5]{4^7} = 4^{\frac{4}{5}} \cdot 4^{\frac{7}{5}} = 4^{\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}\right)} = 4^{\frac{11}{5}}.$$

b)
$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{\frac{a^2 \cdot b^3 \cdot c}{a^4 \cdot b^2 \cdot c}} \right)^3 &= \left(\left(\frac{a^2 \cdot b^3 \cdot c}{a^4 \cdot b^2 \cdot c} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^3 = \left(\frac{a^2 \cdot b^3 \cdot c}{a^4 \cdot b^2 \cdot c} \right)^{\frac{3}{4}} = \\ &= \left(a^{(2-4)} \cdot b^{(3-2)} \cdot c^{(1-1)} \right)^{\frac{3}{4}} = \left(a^{-2} \cdot b \right)^{\frac{3}{4}} = \left(a^{-2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)} \cdot b^{\frac{3}{4}} \right) = \left(a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \right) \end{aligned}$$

Antwoorden van de opgaven

Opgave A.1.1.

Bereken en geef aan uit hoeveel termen/factoren de volgende sommen/producten bestaan:

	Aantal termen	Aantal factoren
$-4 + 7 = 3$	2	0
$-7 \cdot a + 9 \cdot a = 2 \cdot a$	2	4
$-3 \cdot p \cdot q - 9 \cdot p \cdot q =$	2	6
$(-1)^{100} = 1$	0	100

Opgave A.1.2.

Werk de haakjes weg (niet uitrekenen):

a) $17 \cdot (18 + 19) = 17 \cdot 18 + 17 \cdot 19$

b) $(33 - 19) \cdot 31 = 31 \cdot 33 - 31 \cdot 19$

c) $a \cdot (-3 + 19) = -3 \cdot a + 19 \cdot a$

d) $-b \cdot (-a - c) = a \cdot b + b \cdot c$

Opgave A.1.3.

Ontbind (niet uitrekenen):

a) $21 \cdot 117 + 99 \cdot 117 = 117 \cdot (21 + 99)$

b) $67 \cdot 45 + 67 \cdot 41 + 67 \cdot 5 = 67 \cdot (45 + 41 + 5)$

c) $-7 \cdot a - 9 \cdot a = a \cdot (-7 - 9)$

Opgave A.2.1.

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

a) $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

b) $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 7^2$

c) $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11 = 3^2 \cdot 11$

d) $900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Opgave A.3.1.

Vereenvoudig:

a) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{18}{84} = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$

c) $\frac{11}{33} = \frac{1}{3}$

Opgave A.3.2.

Bereken:

$$\text{a) } \frac{17}{10} - \frac{1}{2} = \frac{17}{10} - \frac{5}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\text{b) } \frac{2}{7} + \frac{3}{8} = \frac{16}{56} + \frac{21}{56} = \frac{37}{56}$$

$$\text{c) } \frac{2}{a} + \frac{6}{b} = \frac{2b}{ab} + \frac{6a}{ab} = \frac{(2b + 6a)}{ab} = \frac{2(b + 3a)}{ab}$$

Opgave A.3.3.

Bereken:

$$\text{a) } \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{24}$$

$$\text{b) } \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{11} + \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{55} + \frac{2}{55} = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$$

$$\text{c) } \frac{2}{c} \cdot \frac{5}{d} = \frac{10}{cd}$$

Opgave A.3.4.

Bereken:

$$\text{a) } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{b) } \frac{\frac{1}{a}}{\frac{2}{b}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b}{2a}$$

Opgave A.4.1.

Schrijf korter:

a) $10^4 \cdot 10^3 = 10^{(4+3)} = 10^7$

b) $2^9 \cdot 2 = 2^{(9+1)} = 2^{10}$

c) $3^4 \cdot 3^{-5} = 3^{(4+(-5))} = 3^{(4-5)} = 3^{-1}$

d) $k^5 \cdot k^7 = k^{(5+7)} = k^{12}$

Opgave A.4.2.

Schrijf korter:

a) $\frac{10^5}{10^2} = 10^{(5-2)} = 10^3$

b) $\frac{2^{12}}{2^{11}} = 2^{(12-11)} = 2$

c) $\frac{3^5}{3^{-6}} = 3^{5-(-6)} = 3^{5+6} = 3^{11}$

d) $\frac{p^6}{p^2} = p^{(6-2)} = p^4$

Opgave A.4.3.

Schrijf korter:

a) $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$

b) $(2^{-2})^3 = 2^{-2 \cdot 3} = 2^{-6}$

c) $(p^4)^2 = p^{4 \cdot 2} = p^8$

Opgave A.5.1.

Bereken:

a) $\sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{4^2} = 4$

c) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$

Opgave A.5.2.

Vereenvoudig:

a) $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

b) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Bereken en vereenvoudig:

c) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$

d) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{35} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} = 10\sqrt{7}$

Opgave A.5.3.

Schrijf als oneigenlijke macht:

a) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[7]{35^3} = 35^{\frac{3}{7}}$

c) $\sqrt[8]{7^8} = 7^{\frac{8}{8}} = 7$